数理解析研究所講究録
594巻 1986年 39-59



# Einstein方程式の自己双対解における Grassmann多様体の構造

京大数理研　高崎金久（Kanehisa TAKASAKI）

佐藤[1]はsoliton現象に関連する様々な方程式（soliton方程式）が無限次元Grassmann多様体上の質点力学系として統一的に記述できることを示し，同様の構造が"高次元"の非線型積分可能系においても見出されるであろうと予想した．筆者[2]は自己双対Yang-Mills場の方程式において実際にその予想が正しいこと（より正確には，Grassmann多様体に値をとるある種の場のdynamicsとして自己双対Yang-Mills場の方程式が理解できること）を示した．鈴木[3]はこの結果をさらにWittenが導いたあるgauge場の方程式（これは自己双対と限らないYang-Mills場の記述と関連がある）へ拡張した．本稿の目的はEinstein方程式の自己双対解と呼ばれる解を記述する方程式もまた同様の構造をもつことを指摘することにある．

Einstein方程式の自己双対解を記述する方程式が従来の非

線型積分可能系と良く似た構造をもつ，ということはすでに旧稿 [4] で論じておいたが，そこでは Grassmann 多様体上の力学系としての記述はまだ得られていなかった．本稿ではこの問題に対する最終的解答を与える．詳細については準備中の論文 [5] に譲る．

## 1. Einstein 方程式の自己双対解

4 次元における Riemann 計量 $ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}(x)\,dx^\mu dx^\nu$ ( $x = (x^1, \ldots, x^4)$, $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$ ) に対して Riemann 曲率形式を $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ ; Ricci 形式を $R_{\mu\nu}$ ( $= g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\nu\beta}$ ) と書くとき Einstein 方程式（真空中，宇宙項なし）は

$$(1) \qquad R_{\mu\nu} = 0$$

と書ける．これに対して自己双対解は

$$(2) \qquad * \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} R_{\mu\nu\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} R_{\mu\nu\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

という方程式で定義される．ここに $*$ は Hodge 作用素である．実は (2) から (1) は自動的に従う．これは Yang-Mills 方程式とその自己双対解の関係に似ている．以下我々が議論の対象

とするのは専ら自己双対解の方である[6].

方程式(1), (2) はいずれも $g_{\mu\nu}$ の導函数の有理式しか含まないから、そのままの形で実変数 $x = (x^1, \ldots, x^4)$ を複素変数 $z = (z^1, \ldots, z^4)$ でおきかえて複素領域で考えることができる. 例えばもとの方程式の実解析的な解はそのように複素領域へ延長して扱っても構わない. 以下では (1), (2) においてそのように変数を複素変数におきかえたものを専ら考察する. これは積分可能性を論じる為には欠かせないことである.

## 2. Null-tetrad と Plebanski の方程式

自己双対解を議論する際には計量成分 $g_{\mu\nu}$ を未知函数とみなして直接に方程式 (2) を議論することは実は余り見通しが良くない. Plebanski [7] が指摘したように、より見通しの良い定式化は null-tetrad を用いることによって得られる.

null-tetrad とは計量 $ds^2$ を

(3) $$ds^2 = e^1e^2 + e^3e^4 = \det\begin{pmatrix} e^3 & e^1 \\ -e^2 & e^4 \end{pmatrix}, \quad e^1\wedge\cdots\wedge e^4 \neq 0,$$

という形に表示する1次微分形式の4つ組 $(e^1, \ldots, e^4)$ のことを言う. このような1次微分形式を得るにはまず計量を

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2$$

と表示しておいて

$$e^1 = \omega^1 + \sqrt{-1}\,\omega^2, \quad e^2 = \omega^1 - \sqrt{-1}\,\omega^2,$$
$$e^3 = \omega^3 + \sqrt{-1}\,\omega^4, \quad e^4 = \omega^3 - \sqrt{-1}\,\omega^4,$$

という複素1次結合をつくればよい．$(\omega^1, \ldots, \omega^4)$の方は正規直交枠で，Darboux-Cartan以来微分幾何学ではおなじみのものである．Riemann計量（つまり正定値）から出発する限りこのような$(\omega^1, \ldots, \omega^4)$を局所的に選ぶことには何ら問題は無い．しかし$(e^1, \ldots, e^4)$の方はそれから複素1次結合として導入されている．つまりこれは実多様体の余接束ではなくて，その複素化に属するものである．このようなものを扱うには多様体の方も複素化しておく方が都合が良い．前節後半に述べたことはこの点にも関連している．それゆえ我々は$(e^1, \ldots, e^4)$と$ds^2$をそれぞれ複素多様体上の1次微分形式，対称2次微分形式とみなす：

$$(4)\quad \begin{aligned} e^a &= \sum_{\mu=1}^{4} e^a_\mu(z)\, dz^\mu, \\ ds^2 &= \sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}(z)\, dz^\mu dz^\nu = e^1 e^2 + e^3 e^4. \end{aligned}$$

計量を(3)のように表示する仕方は一意的ではなく，次の任意性が残る：

$$(5)\quad \begin{pmatrix} e^3 & e^1 \\ -e^2 & e^4 \end{pmatrix} \longrightarrow \ell \begin{pmatrix} e^3 & e^1 \\ -e^2 & e^4 \end{pmatrix} \dot{\ell}, \quad \ell = \ell(z),\ \dot{\ell} = \dot{\ell}(z)\ \text{は}SL(2,\mathbb{C})\text{値函数.}$$

$\ell$と$\dot{\ell}$それぞれによりひきおこされる変換を左・右gauge変換と呼ぶことにする。

Plebanski[7]はnull-tetradの適当な右gauge変換により方程式(2)が次の方程式に帰着することを注意した：

$$(6)\qquad d(e^2\wedge e^3)=0,\ d(e^3\wedge e^4-e^1\wedge e^2)=0,\ d(e^1\wedge e^4)=0.$$

これは右gauge変換による簡単化だが，さらに左gauge変換を施すと$(e^1,\ldots,e^4)$をある標準形に帰着させることができる。Plebanskiはそのような標準形を二種類与えているが，我々の以後の議論に直接関係があるのはその第二の標準形であり，次の形に書ける：

$$(7)\qquad \begin{aligned} e^3 &= dx-\Theta_{yy}dq-\Theta_{xy}dp, & e^1 &= dp,\\ -e^2 &= dy+\Theta_{xy}dq+\Theta_{xx}dp, & e^4 &= dq. \end{aligned}$$

ここで$(p,q,x,y)$は適当な座標，$\Theta=\Theta(p,q,x,y)$は次の方程式(second heavenly equation)の解である。

$$(8)\qquad \Theta_{yp}-\Theta_{xq}+\Theta_{xy}{}^2-\Theta_{xx}\Theta_{yy}=0.$$

また$\Theta_{xx}\equiv\partial^2\Theta/\partial x^2$，etcである。いいかえれば，従来変数や独立変数をとり直し，余分な自由度を消去することにより方程式(2)は単独2階方程式(8)にまで簡単化される。

## 3. u-potentials.

Plebanski の方程式 (6) は新たな parameter $\lambda$ を導入することにより次の形にまとめられる：

(9) $$d\left((e^3+\lambda e^1)\wedge(-e^2+\lambda e^4)\right)=0.$$

ただしここで $d$ は時空座標 $z$ のみに関する全微分を表わす．すなわち "$d\lambda=0$" と解釈する．（以下 $d$ と $\lambda$ に関しては常にこの関係を仮定する．）次の事実は以後の議論の基礎をなす．

<u>命題</u>． 方程式 (9) の下で

(10) $$du^1\wedge du^2=(e^3+\lambda e^1)\wedge(-e^2+\lambda e^4)$$

をみたす Laurent 級数（一般には形式的）$u^\alpha=\sum_{n=-\infty}^{1}u_n^\alpha(z)\lambda^n$, $\alpha=1, 2$, が存在する．

命題の証明の方法はいろいろありうるが，形式的には閉2次外微分形式の標準形に関する Darboux の定理の応用とみなすことができる．Darboux の定理によれば，多様体上の2次微分形式 $\omega$ が閉，すなわち $d\omega=0$ であって，さらにある整数 $r$ に関して $\omega\wedge\cdots\wedge\omega$ ($r$ 個) $\neq 0$ , $\omega\wedge\cdots\wedge\omega$ ($r+1$ 個) $=0$

であれば，各点の近傍で局所的に定義された函数 $P_1, \ldots, P_r$, $Q_1, \ldots, Q_r$ が存在して

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} dP_i \wedge dQ_i \ , \quad dP_1 \wedge \cdots \wedge dP_r \wedge dQ_1 \wedge \cdots \wedge dQ_r \neq 0$$

となる（松田［8］参照）．さらにこの定理は $\omega$ が parameter を含む場合にも容易に拡張できる．そこで parameter $\lambda$ を含む2次外微分形式 $(e^3\lambda^{-1} + e^1) \wedge (-e^2\lambda^{-1} + e^4)$ に対してこの定理を適用すると，$r = 1$ であり，従って

$$(e^3\lambda^{-1} + e^1) \wedge (-e^2\lambda^{-1} + e^4) = dP(z,\lambda) \wedge dQ(z,\lambda)$$

という $P(z,\lambda)$, $Q(z,\lambda)$ が $\lambda = \infty$ の近傍で存在することが判る．$u^1 = \lambda P(z,\lambda)$, $u^2 = \lambda Q(z,\lambda)$ とおいて $\lambda = \infty$ のまわりで Laurent 展開すれば求める $u^1, u^2$ を得る．

明らかに (10) をみたす $u^1, u^2$ が存在すれば (6) ($\Leftrightarrow$ (9)) が従う．他方上の命題は逆に (6) の下でそのような $u^1, u^2$ が存在することを示している．いいかえれば，(6) は $u^1, u^2$ に対する方程式 (10) が解をもつための積分可能条件を与えている．同様の議論は Newman et al.［9］, Boyer, Plebanski［10］に於ても展開されている．我々は $u^1, u^2$ を $u$-potentials と呼ぶことにする．

## 4. null-tetrad の標準形と u-potentials

u-potentials と第2節に示した null-tetrad の標準形とは簡単な関係で結ばれている．$u^1$，$u^2$ を与えられた u-potentials とする．このとき (10) は Laurent係数に対する方程式

(11.a) $$e^2 \wedge e^3 = du_1^1 \wedge du_1^2,$$

(11.b) $$e^3 \wedge e^4 - e^1 \wedge e^2 = du_1^1 \wedge du_0^2 + du_0^1 \wedge du_1^2,$$

(11.c) $$e^1 \wedge e^4 = du_1^1 \wedge du_{-1}^2 + du_0^1 \wedge du_0^2 + du_{-1}^1 \wedge du_1^2,$$

(11.d) $$0 = \sum_{m=n-1}^{1} du_m^1 \wedge du_{n-m}^2 \qquad (n = -1, -2, \ldots)$$

に書き直せるが，このうち (11.a) と (11.c) から

(12) $$du_1^1 \wedge du_1^2 \wedge du_0^1 \wedge du_0^2 = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \neq 0$$

となるから，$(u_1^1, u_1^2, u_0^1, u_0^2)$ を改めて時空座標にとることができる．実はこれが $(p, q, x, y)$ に他ならない．より正確には：

<u>命題</u>． $(p, q, x, y) \equiv (u_1^1, u_1^2, u_0^1, u_0^2)$ を新たな時空座標にとり，他の $u_n^\alpha$ $(\alpha = 1, 2,\ n = -1, -2, \ldots)$ をそれらの函数とみなす．このとき $SL(2, \mathbb{C})$ 値函数 $\ell = \ell(p, q, x, y)$ が存在して

(13) $$\begin{pmatrix} e^3 & e^1 \\ -e^2 & e^4 \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} dx - u_{-1,x}^1 dp - u_{-1,y}^1 dq & dp \\ dy - u_{-1,x}^2 dp - u_{-1,y}^2 dq & dq \end{pmatrix}$$

となる．ここで $u_{-1,x}^1 \equiv \partial u_{-1}^1 / \partial x$, etc. さらに $u_{-1}^1$ と $u_{-1}^2$ は次の方程式をみたす．

$$(14.a)\qquad u^1_{-1,x} + u^2_{-1,y} = 0,$$

$$(14.b)\qquad u^1_{-1,p} + u^2_{-1,q} + u^2_{-1,x}u^1_{-1,y} - u^2_{-1,y}u^1_{-1,x} = 0.$$

この命題は方程式(11)から簡単な議論で導ける．Ⓗとの関係を見るには最後の方程式(14)に注目する．(14.a)は明らかに

$$(15)\qquad u^1_{-1} = Ⓗ_y,\quad u^2_{-1} = -Ⓗ_x$$

というⒽの存在を保証する．これらの関係式を今度は(14.b)へ代入するとsecond heavenly equation (8)を得る．

## 5．線型"散乱"問題

従来知られてきた非線型積分可能系（soliton方程式，自己双対Yang-Mills場の方程式，etc）に共通するひとつの重要な性質は，各非線型系が適当な線型系の積分可能条件とみなせることである．古典的な例（KdV，非線型Schrödinger，etcの方程式）では対応する線型問題はSchrödinger方程式あるいはDirac方程式の形をしていて，一種の散乱問題と解釈される[11]．自己双対Yang-Mills場の場合には線型問題は

$$(16)\qquad \begin{aligned} &(-\lambda(\partial_x + A_x) + (\partial_p + A_p))\,W = 0,\\ &(-\lambda(\partial_y + A_y) + (\partial_q + A_q))\,W = 0, \end{aligned}$$

と書ける．ここで $(\partial_p, \partial_q, \partial_x, \partial_y) = (\partial/\partial p, \partial/\partial q, \partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である．また $(A_p, A_q, A_x, A_y)$ は Yang-Mills 場の gauge potentials，すなわち与えられた行列 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとる函数で，非線型方程式の未知函数となる．(16) の積分可能条件は

$$(17)\qquad [-\lambda(\partial_x + A_x) + (\partial_p + A_p),\ -\lambda(\partial_y + A_y) + (\partial_q + A_q)] = 0$$

と書けるが，これが自己双対場の方程式の同値な別表現を与えるわけである．それでは Einstein 方程式の自己双対解の場合はどうであろうか？

実はこの場合も同様の線型問題が存在する．それを説明するために null-tetrad $(e^1, \ldots, e^4)$ に対して

$$(18)\qquad \langle e^a, \partial_b \rangle = \delta^a_b, \quad a, b = 1, \ldots, 4$$

という関係式で定まる vector 場 $(\partial_1, \ldots, \partial_4)$ を導入する．例えば (7) の null-tetrad に対しては

$$(19)\qquad \begin{aligned} &\partial_3 = \partial_x, \quad \partial_1 = \partial_p + \Theta_{xy}\partial_x - \Theta_{xx}\partial_y,\\ &-\partial_2 = \partial_y, \quad \partial_4 = \partial_q + \Theta_{yy}\partial_x - \Theta_{xy}\partial_y. \end{aligned}$$

ちなみにこのような vector 場に対しては $dh = \sum_{a=1}^{4} (\partial_a h) e^a$ と

いう等式が任意の函数 $h$ に対して成立する．さてこのとき：

<u>命題</u>．　方程式 (10) は次の方程式系に同値である．

$$(20.a)\qquad (-\lambda\partial_3+\partial_1)u=0,\ (\lambda\partial_2+\partial_4)u=0\quad (u=u^1,u^2),$$

$$(20.b)\qquad (\partial_2 u^1)(\partial_3 u^2)-(\partial_2 u^2)(\partial_3 u^1)=1.$$

すでに第3節で注意したように方程式 (6) は方程式 (10) の積分可能条件であるから，従って方程式 (20) の積分可能条件でもある，ということになる．(20) が求めていた線型問題である．こうして u-potentials は従来の非線型積分可能系における線型"散乱"問題の波動函数（例えば (16) における $W$）と同じ種類の量であることが明らかになった．

(20) を線型問題と呼ぶことには抵抗があるかも知れない．なぜなら，(20.b) は明らかに非線型方程式だからである．しかしながら，我々はこれを線型系 (20.a) に付け加えられた束縛条件 (constraint) と解釈して，(20) をあくまで線型問題（非線型の束縛条件が課されているが）とみなす．実は似た状況は例えば (16) においても起こるのである．実際 gauge potentials が Lie 環 $\mathfrak{g}$ に値をとるときには (16) に対して

$$(21)\qquad W(p,q,x,y,\lambda)\in G\quad \text{for every } (p,q,x,y,\lambda)$$

という束縛条件を追加するのが自然であるが（ここで $G$ は $\mathfrak{g}$ の Lie 群である），例えば $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C})$，$G=SL(r,\mathbb{C})$ $(r\geqq 2)$ の場合を考えてみれば判るように，このような束縛条件は一般に $W$ に対する非線型条件となる．(20.b) も同じ種類の束縛条件とみなすのである．

しかも (20.b) は (21) と同様の群論的な意味をもつことが判る．このことを見るためには前節の如く $(p,q,x,y)\equiv(u^1_1, u^2_1, u^1_0, u^2_0)$ を時空座標にとり，null-tetrad を標準形 (7) にうつしておくのが都合がよい．（注意：(20) は null-tetrad の左 gauge 変換によって同じ形の方程式にうつるから，はじめから標準形の null-tetrad ならびに対応する vector 場 (19) に対して議論しても構わない．）このとき (20.a)，(20.b) はそれぞれ

$$(22.a)\quad (-\lambda\partial_x+\partial_p+\Theta_{xy}\partial_x-\Theta_{xx}\partial_y)u=0,$$

$$(-\lambda\partial_y+\partial_q+\Theta_{yy}\partial_x-\Theta_{xy}\partial_y)u=0\quad (u=u^1,u^2),$$

$$(22.b)\quad \partial(u^1,u^2)/\partial(x,y)=(\partial_x u^1)(\partial_y u^2)-(\partial_x u^2)(\partial_y u^1)=1,$$

となる．非線型束縛条件 (22.b) は従って，$(x,y)$ 空間内の変換 $(x,y)\longrightarrow(u^1,u^2)$（ただし $(p,q,\lambda)$ を parameter にもつ）が symplectic form $dx\wedge dy$ に関する正準変換であることを意味する．つまり，$(u^1,u^2)$ は正準変換の群（正確には擬群というべきである）に値をとる $(p,q,\lambda)$ の函数を定める，というのが

(20.b) の内容だが，これは明らかに(21)と同じ構造をもつ束縛条件である．

束縛条件を除いた(20.a)のみに関する積分可能条件（すなわち $u^1, u^2$ という二つの独立解をもつための条件）を書き下すこともできるが，それは(6)よりも弱い条件になってしまう．Einstein方程式の自己双対解を考える限り，上のような束縛条件を除くことはできない．

## 6. Grassmann多様体の構造

いよいよ本題に入る．

議論を簡単にするため以後は方程式(6)の形式解，つまり $e^a_\mu(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ （$\mathbb{C}[[z]]$ は $z=(z^1,\dots,z^4)$ の複素係数形式的巾級数環を表わす）という解のみを考える．収束条件も議論できるが一切省く．このような形式解に対しては u-potentials もやはり形式的なもの，つまり $u^\alpha_n(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ $(\alpha=1,2,\ n\le 1)$ となる．以下，時空座標 $z$ として専ら $(p,q,x,y)=(u^1_1,u^2_1,u^1_0,u^2_0)$ を用いる．

前節で注意したことにより，u-potentials $u^1, u^2$ は $(x,y)$ 空間内の正準変換 $(x,y)\rightarrow(u^1,u^2)$ を定める．$(p,q)$ は parameter

とみなせるから，$(x,y)\mapsto(u^1-p\lambda,\ u^2-q\lambda)$ が正準変換であるといってもよい．この正準変換を $g(p,q)=(g^1(p,q;x,y,\lambda),\ g^2(p,q;x,y,\lambda))$ と書き，その逆変換を $g(p,q)^{-1}=(g^{*1}(p,q;x,y,\lambda),\ g^{*2}(p,q;x,y,\lambda))$ と書く：

$$(23.a)\qquad g^1(p,q;x,y,\lambda)=u^1(p,q,x,y;\lambda)-p\lambda=\sum_{n=-\infty}^{0}u^1_n(p,q,x,y)\lambda^n,$$

$$(23.b)\qquad g^2(p,q;x,y,\lambda)=u^2(p,q,x,y;\lambda)-q\lambda=\sum_{n=-\infty}^{0}u^2_n(p,q,x,y)\lambda^n,$$

$$(23.c)\qquad g^1(p,q;g^{*1}(p,q;x,y,\lambda),g^{*2}(p,q;x,y,\lambda),\lambda)=x,$$

$$(23.d)\qquad g^2(p,q;g^{*1}(p,q;x,y,\lambda),g^{*2}(p,q;x,y,\lambda),\lambda)=y,$$

$$(23.e)\qquad g^{*1}(p,q;g^1(p,q;x,y,\lambda),g^2(p,q;x,y,\lambda),\lambda)=x,$$

$$(23.f)\qquad g^{*2}(p,q;g^1(p,q;x,y,\lambda),g^2(p,q;x,y,\lambda),\lambda)=y.$$

今の場合 $g(p,q)$，$g(p,q)^{-1}$ はともに形式的な変換として意味をもつ．このように u-potential 対を変換と解釈することが，前節での議論と同様，ここでも基本的な考え方となる．

Grassmann多様体はある線型空間内の線型部分空間の集合として実現される．今の場合に基礎となる線型空間の選び方には様々な考え方があるが，ここでは次の $\Phi$ をとる：

$$(24.a)\qquad \Phi_{m,n}\equiv\{\text{形式的級数}\sum_{(ijk)\in Z}\xi_{ijk}x^iy^j\lambda^{-k-1};\ \xi_{ijk}\in\mathbb{C}\ ((ijk)\in Z),$$
$$i+j+k<m \text{ または } k<n \text{ のとき } \xi_{ijk}=0\},\quad \text{ここで } Z\equiv\mathbb{N}^2\times\mathbb{Z},\ \mathbb{N}\equiv\{0,1,2,\cdots\},$$

$$(24.b)\qquad \Phi_{-\infty,n}\equiv\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\Phi_{m,n},$$

(24. c) $$\Phi \equiv \bigcup_{m,n=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,n}.$$

$\Phi_{m,n}$ $(m,n\in\mathbb{Z})$、$\Phi_{-\infty,n}$ $(n\in\mathbb{Z})$ はそれぞれ$\Phi$のfiltrationを与えるが、我々は前者を原点の基本近傍系とするような線型位相を$\Phi$に入れる．これは佐藤[1]の用いた線型空間$V$からの類推である．さらにそこで提示されたGrassmann多様体 $GM=GM_V$ の定義をヒントにして，$\Phi$に対するGrassmann多様体 $GM_\Phi$ を次のように定義する：

(25) $GM_\Phi \equiv \{$閉線型部分空間$\Psi\subset\Phi$; 射影$\Phi\to\Phi/\Phi_{-\infty,0}$から導かれる線型写像$\Psi\to\Phi/\Phi_{-\infty,0}$ の kernel と Cokernel がともに有限次元で，かつ次元が一致する$\}$.

$\Phi$における線型位相の入れ方および$GM_\Phi$の定義の仕方が本当にこれで適切なものになっているのか，実はよくわからない．しかしとりあえず"作業仮説"として上の定義を採用することにしよう．実のところ，Einstein方程式の特異点をもたぬ自己双対解（前述の意味の形式解もその一種）を記述するためには上の$GM_\Phi$全体は不要で，次の部分集合のみで話が済む：

(26) $GM_\Phi^\emptyset \equiv \{$閉線型部分空間$\Psi\subset\Phi$; $\Psi\to\Phi/\Phi_{-\infty,0}$が同型$\}$

これは$GM_V$における同様の部分集合$GM_V^\phi$（Young図形Yごと

にきまるSchubert cell $GM^Y_V$のうち空のYoung図形$\phi$に対応するもの[1]で，有限次元の場合のopen dense cellに該当する）の類似物だが，これに関しては定義の適切性にほとんど疑問はない．

さてここで結論を先に述べると，Einstein方程式の自己双対解は上に定義した$GM^{\phi}_{\Phi}$において$(p, q)$を2個の時間変数とする（多時間）質点運動と解釈できる，ということが判るのである．ただし，このことを前述の形式解で定式化しようとすると，上の言い方はいささか不正確である．なぜなら$(p, q)$もまた形式的な変数であり，それらに依存する$GM^{\phi}_{\Phi}$上の点というのはそのままでは意味のある概念ではないからである．

この形式的な時間変数$(p, q)$をもつ質点運動というものを定式化する最も素朴な方法は$\Phi$の代わりに$\mathbb{C}[[p, q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi$から出発し，(26)において閉線型部分空間$\Psi \subset \Phi$の代わりに$\mathbb{C}[[p, q]]$－部分加群$\Psi \subset \mathbb{C}[[p, q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi$を，また$\Phi / \Phi_{-\infty, 0}$の代わりに$\mathbb{C}[[p, q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi / \mathbb{C}[[p, q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi_{-\infty, 0}$を考えることで得られる集合 ―― 仮に$GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p, q]] \otimes \Phi}$と書く ―― を用いることであろう．この$GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p, q]] \otimes \Phi}$は形式的時間変数$(p, q)$でparameter付けされる質点運動の軌跡全体の集合と解釈される．そこでu-potential対あるいは対応する$g(p, q)$に対して$GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p, q]] \otimes \Phi}$の元$\gamma(g(p, q))$を次のように定義する：

$$(27)\qquad \gamma(g(p,q)) \equiv \{\ \xi\circ g(p,q)^{-1} \equiv \xi(g^{*1}(p,q;x,y,\lambda),\ g^{*2}(p,q;x,y,\lambda),\lambda);$$
$$\xi=\xi(x,y,\lambda)\in \mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi^{\phi}\ \},$$

ここで $\Phi^{\phi}$ は $\Phi$ の次のような線型部分空間である.

$$(28)\qquad \Phi^{\phi}=\{\ \xi=\sum_{(ijk)\in Z}\xi_{ijk}\,x^i y^j \lambda^{-k-1}\in\Phi;\ k\geqslant 0 \text{ のとき } \xi_{ijk}=0\}.$$

これは実際に $GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi}$ に属する. [ 大雑把な証明: そもそも線型部分空間 $\Psi\subset\Phi$ (あるいは $\mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi$) が $GM^{\phi}_{\Phi}$ (あるいは $GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi}$) に属するためには, $\Psi$ が

$$(29)\qquad \xi^{(lmn)}-x^l y^m \lambda^{-n-1}\in\Phi_{-\infty,0}\ \left(\text{あるいは } \mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi_{-\infty,0}\right)$$

という条件をみたす基底 $\{\xi^{(lmn)};(lmn)\in N^c\}$ (ここで $N^c \equiv \mathbb{N}^2\times\mathbb{N}^c$, $\mathbb{N}^c\equiv\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}=\{-1,-2,\cdots\}$) をもつことが必要十分であるが (容易にチェックできる), (27) は $\{\xi\circ g(p,q)^{-1};\ \xi= x^l y^m\lambda^{-n-1},\ (lmn)\in N^c\}$ という基底をもち, これから上のような基底をつくることはすぐにできる.] このように定義される $\gamma(g(p,q))$ は確かに $GM^{\phi}_{\Phi}$ の点 $\gamma(g(0,0))$ から出発して形式的時間変数 $(p,q)$ に依存して動く点の軌跡, という描像に合う.

このようにして我々は Einstein 方程式の自己双対解を無限次元 Grassmann 多様体 $GM_{\Phi}$ 上の質点運動 (形式解に対するその正確な定式化は前述の如くいささか複雑になるが) に翻訳することができた. ここで注意すべきなのは, 自己双対解に

対応する質点は$GM_{\Phi}$のごく小さい（それでも無限次元だが）部分集合の中に含まれてしまうことである．これは前述のように特異点の無い解が$GM_{\Phi}^{\phi}$内の点に対応するというだけのことではなく，(27) のように得られる線型部分空間$\Psi \subset \Phi$（あるいは$\Psi \subset \mathbb{C}[[p,q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi$）が次の条件も満たすことによる：

i) $\lambda\Psi \subset \Psi$.

ii) $\Psi$は積についても閉じている．つまり単なる線型空間ではなくて，$\mathbb{C}$（あるいは$\mathbb{C}[[p,q]]$）－代数をなす．

iii) $\Psi$は$\mathbb{C}$（あるいは$\mathbb{C}[[p,q]]$）－代数として$\Phi^{\phi}$（あるいは$\mathbb{C}[[p,q]] \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Phi^{\phi}$）に同型である．特に$x, y, \lambda \in \Phi^{c}$に対応する3個の元$g^{*1}$, $g^{*2}$, $\lambda$で"生成"される．

以上のことは (27) における$\gamma(g(p,q)) \in GM_{\Phi}^{\phi}$および$\gamma(g(p,q)) \in GM_{\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi}^{\phi}$の定義からただちに理解できよう．これらの条件(i)－(iii)はかなり強いもので$GM_{\Phi}^{\phi}$（あるいは$GM_{\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi}^{\phi}$）の中でこれらを満たす$\Psi$は無限余次元（しかし依然としてそれ自体無限次元）の部分多様体をなす．

最後に，上の質点運動のdynamicsを記述する問題を考える．(これを解決しないことには以上の大仕掛けを導入した意味が無い．) soliton方程式[1]，自己双対Yang-Mills場[2]，Wittenの8次元gauge場[3]のいずれの場合にも，Grassmann多様体のことばに翻訳されたときに現れる質点あるいは場の力

学系の dynamics は極めて単純なものになった．今の場合も例外ではなく，時間発展 $\gamma(g(0,0)) \to \gamma(g(p,q))$ は大雑把に言って次のように簡単な法則に従う：

$$(30) \qquad \gamma(g(p,q)) = \exp\left(p\lambda\frac{\partial}{\partial x} + q\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)\gamma(g(0,0)),$$

ここで $\exp\left(p\lambda\frac{\partial}{\partial x}+q\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(p\lambda\frac{\partial}{\partial x}+q\lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)^k$ は無限階微分作用素として $\gamma(g(0,0)) \subset \Phi^{p}$ の各元に作用している．ただし，上の関係式は事実"大雑把"で正確ではない．なぜなら $\gamma(g(0,0))$ にこのような作用素を作用させて得られる (30) 右辺は $\mathbb{C}[[p,q]]\otimes_{\mathbb{C}}\Phi$ をはみ出してしまうからである．（同様の事情は [1−3] の場合にも起こる．）それゆえ (30) の正確な定式化は $\mathbb{C}[[p,q]]\otimes_{\mathbb{C}}\Phi$ の次のような"完備化"を用いて与える：

$$(31.a) \qquad \Phi(p,q)_{m,n} \equiv \Big\{ \text{形式的級数} \sum_{(ijk)\in\mathbb{Z}} \xi_{ijk}\, x^i y^j \lambda^{-k-1}\ ;$$
$$\xi_{ijk} \in \mathbb{C}[[p,q]]_{m-i-j-k} \cap \mathbb{C}[[p,q]]_{n-k} \Big\},$$

$$(31.b) \qquad \Phi(p,q)_{-\infty,n} \equiv \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \Phi(p,q)_{m,n},$$

$$(31.c) \qquad \Phi(p,q) \equiv \bigcup_{m,n=-\infty}^{\infty} \Phi(p,q)_{m,n},$$

ここで

$$(32) \qquad \mathbb{C}[[p,q]]_{\ell} \equiv \Big\{ \sum_{ij=0}^{\infty} c_{ij}\, p^i q^j \in \mathbb{C}[[p,q]]\ ;\ i+j<\ell \text{ のとき } c_{ij}=0 \Big\}.$$

$\Phi(p,q)$ には $\Phi(p,q)_{m,n}$ $(m,\ n \in \mathbb{Z})$ を原点の基本近傍系とする線型位相を入れておく．$\Phi$，$\Phi_{-\infty,0}$ をそれぞれ $\Phi(p,q)$，$\Phi(p,q)_{-\infty,0}$ で

おきかえて (26) と同様に定義される $\Phi(p,q)$ の $\mathbb{C}[[p,q]]$-閉部分加群の集合 —— それを $GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ と書く —— を考える．このとき包含関係 $\mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi \subset \Phi(p,q)$ に対応する自然な全単射

$$
(33)\qquad \begin{array}{ccc} GM^{\phi}_{\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi} & \overset{\approx}{\longleftarrow} & GM^{\phi}_{\Phi(p,q)} \\ \Psi\cap\mathbb{C}[[p,q]]\otimes\Phi & \longleftarrow & \Psi \end{array}
$$

が得られる．[ (29) のような基底 ( $GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ の場合にも存在する) を用いて全単射性を示せる．] そこで (30) の左辺を (33) によって $GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ の中へうつして考える．このとき対応する $GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ の点は (27) において $\mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi^{\phi}$ を

$$
(34)\qquad \Phi(p,q)^{\phi} \equiv \{\sum_{(ijk)\in\mathbb{Z}} \xi_{ijk}x^i y^j \lambda^{-k-1}\in\Phi(p,q);\ k\geqq 0 \text{ のとき } \xi_{ijk}=0\}
$$

でおきかえて得られるものに一致する．(30) の右辺は $\Phi(p,q)$ の中では意味をなし，事実 $GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ に属することが示せる．まとめると，

<u>定理</u>． (27) において $\mathbb{C}[[p,q]]\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\Phi^{\phi}$ を $\Phi(p,q)^{\phi}$ でおきかえて $\gamma(g(p,q))$ を定義し直すとき，$GM^{\phi}_{\Phi(p,q)}$ で (30) が成立する．

(30) を導出するためには [4] で示したような Penrose [12] の自己双対解の構成法を利用するのだが，詳細は [5] に譲る．

REFERENCES


1. Sato, M, and Sato, Y.: Soliton equations as dynamical systems in infinite dimensional Grassmann manifold. In: Proc. U.S.-Japan seminor, "Nonlinear PDE in Applied Science", Tokyo 1982, ed. P.D. Lax and H. Fujita, North-Holland 1982, pp. 259-271.

2. Takasaki, K.: A new approach to the self-dual Yang-Mills equations. Commun. Math. Phys. 94 (1984), 35-59.

   ___________: ditto II. Saitama Mathematical Journal 3 (1985), 11-40.

3. Suzuki, N.: Structure of the solution space of Witten's gauge-field equations. Proc. Japan Acad. 60A (1984), 141-144.

4. Takasaki, K: 自己双対Einstein方程式について. 数理解析研究所講究録 558.

5. Takasaki, K: Aspects of integrability in self-dual Einstein metrics. In preparation.

6. Eguchi, T, Gilkey, P.B., and Hanson, A.J.: Gravitation, gauge theories and differential geometry. Phys. REp. 66 (1980), 213-293.

7. Plebanski, J.F.: Some solutions of complex Einstein equations. J. Math. Phys. 16 (1975), 2395-2402.

8. Newman, E.T., Porter, J.R., and Tod, K.P.: Twistor surfaces and right-flat spaces. Gen. Rel. Grav. 9 (1978), 1129-1142.

9. Matsuda, M.: 外微分形式の理論, 岩波書店.

10. Boyer, C.P.: The geometry of complex self-dual Einstein spaces. In: Lect. Notes. Phys. 189, Springer 1982, pp. 24-45.

    Boyer, C.P., and Plebanski, J.F.: An infinite hierarchy of conservation laws and superposition laws for self-dual Einstein spaces. J. Math. Phys. 26 (1985), 229-234.

11. Tanaka, S., and Date, E.: KdV方程式. 紀伊國屋書店.

12. Penrose, R.: Nonlinear gravitons and curved twistor theory. Gen.Rel.Grav. 7 (1976), 31-52.